



**FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING
AND INFORMATION SCIENCE**



**INFORMATION TECHNOLOGY AND
ELECTRICAL ENGINEERING -
DEVICES AND SYSTEMS,
MATERIALS AND TECHNOLOGIES
FOR THE FUTURE**

Startseite / Index:

<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=12391>

Impressum

Herausgeber: Der Rektor der Technischen Universität Ilmenau
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Peter Scharff

Redaktion: Referat Marketing und Studentische
Angelegenheiten
Andrea Schneider

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Susanne Jakob
Dipl.-Ing. Helge Drumm

Redaktionsschluss: 07. Juli 2006

Technische Realisierung (CD-Rom-Ausgabe):
Institut für Medientechnik an der TU Ilmenau
Dipl.-Ing. Christian Weigel
Dipl.-Ing. Marco Albrecht
Dipl.-Ing. Helge Drumm

Technische Realisierung (Online-Ausgabe):
Universitätsbibliothek Ilmenau
[ilmedia](#)
Postfach 10 05 65
98684 Ilmenau

Verlag:  Verlag ISLE, Betriebsstätte des ISLE e.V.
Werner-von-Siemens-Str. 16
98693 Ilmenau

© Technische Universität Ilmenau (Thür.) 2006

Diese Publikationen und alle in ihr enthaltenen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Mit Ausnahme der gesetzlich zugelassenen Fälle ist eine Verwertung ohne Einwilligung der Redaktion strafbar.

ISBN (Druckausgabe): 3-938843-15-2
ISBN (CD-Rom-Ausgabe): 3-938843-16-0

Startseite / Index:
<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=12391>

Dipl.-Ing. Marco Reinhard, Dr.-Ing. Thomas Mohr; Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil Roland Süße

Approximation von realem Übertragungsverhalten mittels fraktionaler Ableitung nach Riemann-Liouville

ABSTRACT

Zur Erhöhung der Approximationsgenauigkeit des Übertragungsverhaltens realer Bauelemente bietet sich als neue Methode die fraktionale Differenzialrechnung an. Von Vorteil sind dabei die Definitionen nach Riemann-Liouville und Caputo [1], [2].

EINLEITUNG

Erste Berechnungen mit der fraktionalen Differenziation führte Pierre Curie 1889 zur Beschreibung des Aufladeverhaltens eines Kondensators mit gebrochener Zeitpotenz durch. Der mathematische Ansatz entstammt einem Briefwechsel zwischen G.W. Leibnitz und G.A. L'Hospital 1695. Die allgemeine Theorie »fractional calculus« wurde erst Ende des 20. Jahrhunderts entwickelt.

ZU DEN DEFINITIONEN DER FRAKTIONALEN DIFFERENZIALRECHNUNG

Eine der geläufigsten Definitionen zur fraktionalen Differenziation formulierten Riemann und Liouville. Die fraktionale Integration ${}_a I_x^q$ bzw. Differenziation ${}_a D_x^p$ nach Riemann-Liouville der Funktion $f(x)$ mit den Ordnungen q bzw. p in den Grenzen a bis x besitzen die Form:

$${}_a I_x^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^x (x - \xi)^{q-1} f(\xi) d\xi, \quad q \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

$${}_a D_x^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x - \xi)^{k-p-1} f(\xi) d\xi, \quad p \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z}^+, k < p \leq k+1. \quad (2)$$

APPROXIMATION VON REALEM ÜBERTRAGUNGSVERHALTEN

Die Messung des Übertragungsverhalten eines *realen* RC-Hochpasses erfolgte in dem Frequenzbereich $f = 20 \dots 20 \cdot 10^3$ Hz. Aufgrund der Abweichungen über 5% wurde die Kapazität C des *idealen* Hochpasses durch ein *fraktionales* Element Y_ζ ersetzt (siehe Abb. 1).

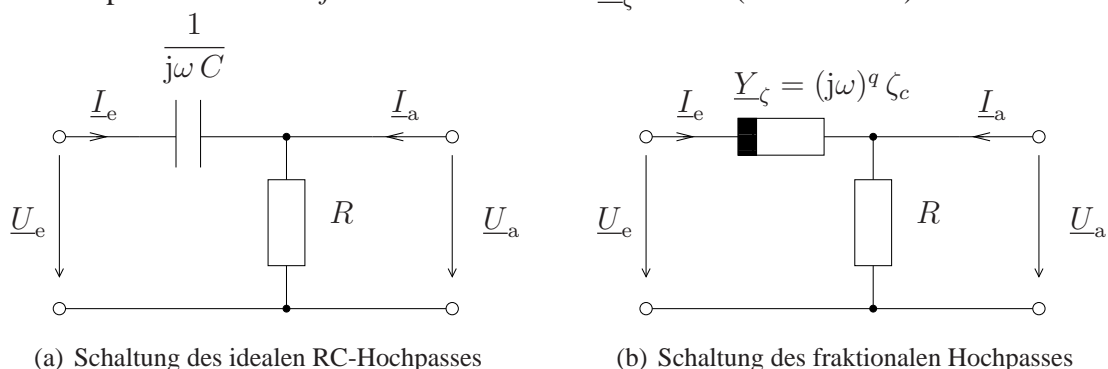


Abb. 1: Darstellung der Schaltungen mit idealen und fraktionalen Hochpass

Die Optimierung erfolgte durch die Minimierung der relativen Abweichung zwischen Messung und Rechnung bezogen auf die Messung mit Hilfe des Verfahrens des Goldenen Schnittes und führt auf das fraktionale Element ζ_c :

$$\zeta_c \approx 94,337 \cdot 10^{-9} \frac{\text{A s}^{0,998}}{\text{V}} . \quad (3)$$

Die Abb. 2 zeigt am Beispiel des Betrages der Übertragungsfunktion eine deutliche Reduzierung der Abweichung. In weiteren Untersuchungen stellte sich heraus, dass der Hauptanteil des Fehlers auf ungenaue Angaben der Kapazität C und Widerstand R herstellerseitig zurückzuführen ist. Dennoch konnte mit optimierten R und C die geringe Abweichung des fraktionalen Hochpasses nicht erreicht werden.

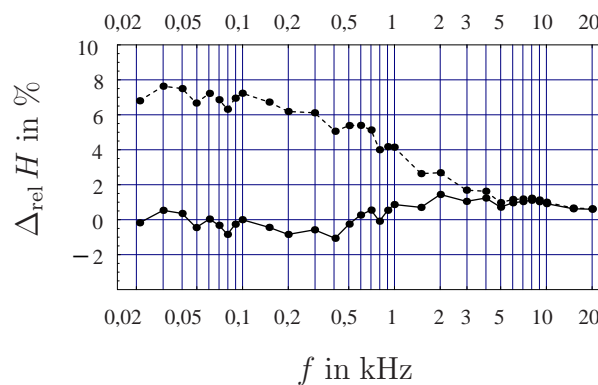


Abb. 2: Darstellung der relativen auf die Messung bezogene Abweichung des Betrages $|\underline{H}(\omega)|$ bei idealem RC- Hochpass (- - -) und fraktionalem Hochpass (—)

Zusammenfassung

Durch die Verwendung der fraktionalen Differenziation nach Riemann-Liouville wurde die Abweichung durchschnittlich auf unter 1 % reduziert. Zum Vergleich lag die Abweichung bei der Optimierung der Parameter R und C noch ein Prozent darüber. Aufgrund dessen empfiehlt sich bei geforderter Genauigkeit der Einsatz der fraktionalen Differenziation. Vor allem beim Einsatz ausgewählter Dielektrika im Kondensator sind auch Ordnungen, die deutlich von Eins abweichen, zu erwarten.

Literatur- bzw. Quellenhinweise:

- [1] Oldham, K. B.; Spanier, J.: *The fractional calculus*, New York, Academic Press, 1974.
- [2] Miller, K.; Ross, B.: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, John Wiley & Sons, 1993.
- [3] Süße, R.: *Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik 2*, G.B. Teubner, Wiesbaden, 2006.

Autorenangabe:

Roland Süße
Drackendorfer Straße 14
D-07742 Jena
E-mail: roland.suesse@web.de

Marco Reinhard
Am Triftweg 3
99869, Goldbach
E-mail: marco_reinhard@freenet.de